学 位 審 査 報 告 書

（ふりがな） 氏　　　　名	いしかわ　いさお 石川　勲
学位（専攻分野）	博　士　（　理　学　）
学 位 記 番 号	理　博　　第　　　　号
学位授与の日付	平成２９年　3月２３日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研　究　科・専　攻	理学研究科　数学・数理解析　専攻

（学位論文題目）

On the construction of twisted triple product p-adic L-functions

（捻れ三重積 p 進 L 関数の構成について）

論 文 調 査 委 員	（主査）　伊藤　哲史　准教授 池田　保　教　授 雪江　明彦　教　授

理　学　研　究　科

（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	石川　勲
論文題目	On the construction of twisted triple product p-adic L-functions		

（論文内容の要旨）

整数論においては L 関数と呼ばれる解析関数の性質の解明が重要である．特に，保型形式に伴う L 関数の特殊値は Selmer 群などの整数論的不変量とも関係していると予想されており，BSD 予想や岩澤主予想などの未解決問題も多い．L 関数を研究する有力なアプローチとして，特殊値を周期で割った値を p 進解析的に補完する p 進 L 関数を用いるものがある．今日では様々な L 関数に対して p 進 L 関数が構成されており，整数論的な応用が得られている．しかし，まだ p 進 L 関数が構成されていない L 関数も多数存在する．また，p 進 L 関数が構成されている場合であっても，一般には複数の構成方法がある．異なる方法で構成された p 進 L 関数が一致するかどうかを調べることは，応用上も重要な問題である．

本論文において，石川氏は，捻れ三重積 L 関数 $L(s, f\times g)$ について p 進 L 関数の構成を行った．ここで，f は重さ $k\geq 2$ の楕円尖点形式，g は p が分解しない実 2 次体上の重さ $(h_1, h_2)\geq(2,2)$ の Hilbert 尖点形式である．f, g のレベルは p の外では 1 であり，さらに “p で通常” という条件を満たすと仮定する．

以下では，石川氏による p 進 L 関数の構成法の概略を述べる．構成で重要な役割を果たすのが，市野氏により得られていた捻れ三重積 L 関数の特殊値公式である．市野氏の公式は，

$$(\text{大域周期積分}) = L(1/2, f\times g)\ \cdot \prod_{v\,:\,\mathbb{Q}\,\text{の素点}} (v\,\text{における局所周期積分})$$

という形の等式である．左辺の大域周期積分は保型形式の Fourier 係数を用いて表すことができ，保型形式の p 進変形理論（肥田理論）により理解することができる．一方，右辺の局所周期積分は，定義は局所的だが，その具体的な計算は一般には難しい．

石川氏は，局所周期積分の計算のために分裂公式を証明した．これについて述べる．F_2/F_1 を p 進局所体の 2 次拡大とし，$\mu=\chi_1|\cdot|_{F_1}^{\lambda_1}, \nu=\chi_2|\cdot|_{F_1}^{\lambda_2}$ を $F_1^\times$ の擬指標とする（χ_1, χ_2 はユニタリ指標）．$|\mathrm{Re}(\lambda_i)|<1/2\ (i=1,2)$ と仮定する．$g\in\mathrm{GL}_2(F_1)$ および主系列表現の元 $f\in\pi(\mu,\nu)$, $\tilde{f}\in\pi(\mu^{-1},\nu^{-1})$ に対して，次のように定める．

$$\Phi_{f,\tilde{f}}(g) := \int_{\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_{F_1})} f(kg)\tilde{f}(k)\,dk$$

また，π_2 を $\mathrm{GL}_2(F_2)$ の既約許容的緩増加表現とし，$\pi_2^\vee$ を反傾表現とする．π_2, $\pi_2^\vee$ の Whittaker 模型の元 W, $\widetilde{W}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\Phi_{W,\widetilde{W}}(g) &:= \int_{F_2^\times} W\left(\mathrm{diag}(a,1)g\right) \widetilde{W}\left(\mathrm{diag}(-a,1)\right)\, d^\times a, \\
\Psi(W,f) &:= \int_{N(F_1)\backslash \mathrm{PGL}_2(F_1)} W(g)f(g)\, dg, \\
\widetilde{\Psi}(\widetilde{W},\tilde{f}) &:= \int_{N(F_1)\backslash \mathrm{PGL}_2(F_1)} \widetilde{W}(\mathrm{diag}(-1,1)g)\tilde{f}(g)\, dg, \\
I_{\mathrm{GP}}(W\otimes f, \widetilde{W}\otimes \tilde{f}) &:= \left|\xi D_{F_2/F_1}\right|_{F_2}^{1/2} \frac{\zeta_{F_1}(1)}{\zeta_{F_2}(1)} \int_{\mathrm{PGL}_2(F_1)} \Phi_{W,\widetilde{W}}(g)\Phi_{f,\tilde{f}}(g)\, dg, \\
I_{\mathrm{RS}}(W\otimes f, \widetilde{W}\otimes f) &:= \Psi(W,f)\, \widetilde{\Psi}(\widetilde{W},\tilde{f}).
\end{aligned}$$

とおく（$\xi \in F_2^\times$ は $\mathrm{tr}_{F_2/F_1}(\xi)=0$ を満たす元）．以上の準備の下で，石川氏の証明した分裂公式は

$$I_{\mathrm{GP}} = I_{\mathrm{RS}}$$

と述べられる．$F_2 = F_1 \times F_1$ の場合には，同様の公式が Michel, Venkatesh, Hsieh により得られていた．

石川氏は，分裂公式を用いることで，捻れ三重積 p 進 L 関数を構成した．これについて述べる．$k \geq h_1 + h_2$ と仮定する．このとき，次の条件を満たす (k,h_1,h_2) の開近傍 $U \subset \mathbb{Z}_p^3$ 上の p 進解析関数 L_p が存在する．$(l,m,n) \in U \cap \mathbb{Z}_{\geq 2}^3$ が $l \geq m+n$ を満たすならば, (l,m,n) に依存する 0 でない明示的な定数倍を除いて

$$L_p(l,m,n) = \mathcal{E}(\pi_{f_l,p},\mathrm{Ad})^{-2} \cdot \frac{\varepsilon(1/2, \mathrm{As}\,\pi_{g_{m,n},p}\otimes\mu_{f_l},\,\psi_2)}{L(1/2,\mathrm{As}\,\pi_{g_{m,n},p}\otimes\mu_{f_l})^2} \cdot \frac{L(1/2, f_l\times g_{m,n})}{\Omega_{f_l}^2}$$

が成り立つ．ここで，f_l は重さ l の尖点形式であり，$g_{m,n}$ は重さ (m,n) の Hilbert 尖点形式である．$f_k = f$, $g_{h_1,h_2} = g$ が成り立つ．$\mathrm{As}\,\pi_{g_{m,n},p}$ は $g_{m,n}$ から定まる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現の p における局所因子に付随する Asai 表現，μ_{f_l} は f_l から定まる擬指標，$\mathcal{E}(\pi_{f_l,p},\mathrm{Ad})$ は f_l の異なるレベル間での合同に関係する数である．また，Ω_{f_l} は周期（肥田周期) と呼ばれる 0 でない複素数である．

上記の等式において，局所 Asai L 関数 $L(1/2,\mathrm{As}\,\pi_{g_{m,n},p}\otimes\mu_{f_l})^{-2}$ が現れることは大切である．例えば, $(4,2,2)\in U$ のとき，f_4 や $g_{2,2}$ が適切な局所条件を満たすと，この値が 0 になることがある．これは，捻れ三重積 L 関数の特殊値が $L(1/2, f_4\times g_{2,2}) \neq 0$ であっても，捻れ三重積 p 進 L 関数の値が $L_p(4,2,2)=0$ となること（例外零点の存在）を示している．

以上が本論文の主要結果である．

（論文審査の結果の要旨）

保型形式に伴う L 関数の特殊値の研究は，整数論における最も重要なテーマの一つである．特に，L 関数の特殊値を p 進解析的に補完する p 進 L 関数の構成は大切であり，岩澤主予想や p 進 BSD 予想などの様々な応用が得られている．しかし，まだ p 進 L 関数が構成されていない L 関数も多数存在する．

本論文において石川氏が考察したのは，楕円尖点形式 f と実 2 次体上の Hilbert 尖点形式 g の組 (f,g) から定まる捻れ三重積 L 関数 $L(s,f\times g)$ である．捻れ三重積 L 関数の特殊値については，市野氏による公式が知られている．市野氏の公式は，保型形式の Fourier 係数と関係する大域周期積分と，局所的に定まる局所周期積分を用いることで，捻れ三重積 L 関数の関数等式の中心 $s=1/2$ における特殊値 $L(1/2,f\times g)$ を表すものである．大域周期積分は保型形式の p 進変形理論（肥田理論）を用いて理解することができる．しかし，局所周期積分の計算は一般には難しく，捻れ三重積 L 関数の整数論的な性質を研究する際の障害となっていた．

この困難を克服するために，石川氏は，局所周期積分を Rankin-Selberg 型と呼ばれる比較的よく理解されている積分を用いて表す分裂公式を証明した．分裂公式の証明は，p 進局所体上の積分を精密に評価することによるものであり，非自明である．そして，分裂公式に市野氏の特殊値公式と肥田理論を組み合わせることで，捻れ三重積 p 進 L 関数を構成した．また，その特殊値を書き表す明示的 p 進補完公式を証明した．

石川氏の証明した明示的 p 進補完公式に局所 Asai L 関数が現れることは重要である．これにより，もとの捻れ三重積 L 関数の特殊値が 0 でなくても，p 進 L 関数の値が 0 になる場合があることが分かる（例外零点の存在）．本論文において得られた結果は，捻れ三重積 p 進 L 関数の微分係数と，モジュラー曲線や Hilbert モジュラー多様体の p 進周期が関係するという例外零点予想への重要な一歩であり，今後もさらなる進展が期待される．

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について平成 29 年 1 月 26 日に試問を行った結果，全調査委員の一致で合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　　年　　　月